5章　補章

§1　1章の補足（p.132〜p.143）

問1

$f(x) = e^{2x}$ とおくと

$f(0) = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$ より，$f'(0) = 2$

$f''(x) = 4e^{2x}$ より，$f''(0) = 4$

$f'''(x) = 8e^{2x}$ より，$f'''(0) = 8$

$f^{(4)}(x) = 16e^{2x}$ より，$f''(0) = 16$

マクローリンの定理を適用すると

$$\boldsymbol{e^{2x}} = 1 + 2\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 4x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 8x^3 + R_4$$

$$= \mathbf{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + R_4}$$

$$\boldsymbol{R_4} = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$$

$$= \frac{16e^{2\theta x}}{4!}x^4$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}e^{2\theta x}x^4 \ (0 < \theta < 1)}$$

問2

$n = 4$としてマクローリンの定理を適用する．

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ より，$f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 1 = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ より，

$f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}\cdot 1 = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$ より，

$f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}\cdot 1 = -\frac{15}{16\sqrt{(1+x)^7}}$

よって

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}x^3 + R_4$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4$$

$$\varepsilon_3 = R_4 = \frac{1}{4!}\left\{-\frac{15}{16\sqrt{(1+\theta x)^7}}\right\}x^4$$

$$= -\frac{15}{4!\cdot 16\sqrt{(1+\theta x)^7}}x^4 \ (0 < \theta < 1)$$

以上より，$f(x)$の3次近似式は，

$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$であるから，$\sqrt{1.1}$の近似値は

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.1 - \frac{1}{8}\cdot 0.1^2 + \frac{1}{16}\cdot 0.1^3$$

$$= 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.0000625$$

$$= \mathbf{1.048813}$$

また，誤差の限界は

$$|\varepsilon_3| = \frac{15}{4!\cdot 16\sqrt{(1+\theta x)^7}}\cdot 0.1^4 < \frac{15}{4!\cdot 16}\cdot 0.1^4$$

$$= 0.0000039\cdots \fallingdotseq \mathbf{0.000004}$$

問3

（1）$f(x) = x^2\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)$とおき，さらに$\frac{1}{x} = y$とおくと

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2}(1 - \cos y)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y^2(1+\cos y)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos^2 y}{y^2(1+\cos y)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2(1+\cos y)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\cos y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos y}$$

$$= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

（2）$f(x) = x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right)$とおき，さらに$\frac{1}{x} = y$とおくと

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(e^{y}-1)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(e^{y}-1)'}{(y)'}$$ ※ロピタルの定理

$$= \lim_{y\to 0} e^{y} = \mathbf{1}$$

問４

（１）関数$\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$をとり，ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^{-\frac{1}{2}+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = \mathbf{0}$$

（２）関数$\dfrac{x\sqrt{x}}{e^{x}}$をとり，ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{e^{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'}{(e^{x})'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{(e^{x})'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{e^{x}}$$

$$= \frac{3}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^{x}} = \mathbf{0}$$

問５

（１）$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^{n}+3^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\times\frac{1}{n!}}{(2^{n}+3^{n})\times\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2^{n}}{n!}+\frac{3^{n}}{n!}} = \infty$$

（２）$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{5}2^{n}}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{5}2^{n}\times 2^{n}}{n!\times 2^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{5}2^{2n}}{n!\,2^{n}}$$

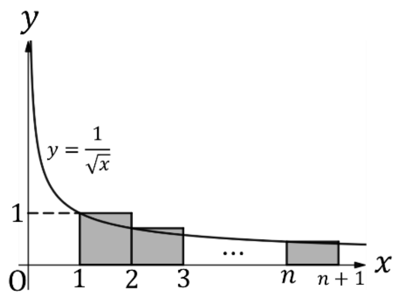
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{5}}{2^{n}}\cdot\frac{4^{n}}{n!} = \mathbf{0}$$

問６

図のように，関数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$と影をつけた部分の面積を

考えると

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \int_{1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$



ここで，$$\int_{1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_{1}^{n+1}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\right]_{1}^{n+1}$$

$$= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

与えられた級数の第n部分和をS_nとすると

$S_n > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$

ここで，$\lim_{n\to\infty}2\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\infty$であるから，

$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

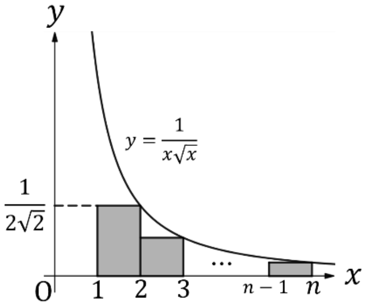
したがって，この級数は発散する．

問７

図のように，関数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$と影をつけた部分の面積を

考えると

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}} > \int_{1}^{n}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$



ここで，$\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^{n+1} x^{-\frac{3}{2}}dx$

$$= \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n$$

$$= -2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

与えられた級数の第n部分和をS_nとすると

$$S_n < 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} < 3$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n < 3$となり，この級数は収束する．

問 8

（１）$\left(\text{右辺}\right)^2 - \left(\text{左辺}\right)^2 = (2n)^2 - \left(\sqrt{n(n+1)}\right)^2$

$$= 4n^2 - n(n+1)$$
$$= 3n^2 - n$$
$$= n(3n-1)$$

$n \geqq 1$のとき，$3n - 1 \geqq 2$であるから，$n(3n-1) > 0$

よって，$(2n)^2 > \left(\sqrt{n(n+1)}\right)^2$

ここで，$2n > 0$，$\sqrt{n(n+1)} > 0$であるから

$\sqrt{n(n+1)} < 2n$

（２）（１）より，$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \dfrac{1}{2n}$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right)$は発散する．

※例題 5 より

そのため，この級数は**発散する．**

問 9

$|(-1)^n| = 1$，$n^2 + 1 > 0$より

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$は収束するので，　※例題 6 より

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|$も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$も収束する．

（２）$|\sin n| \leqq 1$ より，$\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leqq \dfrac{1}{|n^2|} = \dfrac{1}{n^2}$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$は収束するので，　※例題 6 より

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$も収束する．

問 10

与えられたべき級数は，初項1，公比$2x^2$の等比級数だから，

$|2x^2| < 1$ のとき，すなわち，$|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$の時の限り

収束するので，収束半径は$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$である．

問 11

（１）等式の左辺は，公比$-x^2$の等比級数であるから，

$|-x^2| < 1$，すなわち，$|x| < 1$のときに限り収束し，

その和は

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

したがって，$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \dfrac{1}{1+x^2}$

（２）（１）の左辺を0からxまで積分すると

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \left[\tan^{-1} x\right]_0^x$$

$$= \tan^{-1} x$$

したがって，$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \tan^{-1} x$

$\boxed{\text{問 12}}$

$f(x) = \sin x$とおくと，$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x$より，$f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x$より，$f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x$より，$f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x$より，$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x$より，$f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$

よって

$f(x)$に関するマクローリン級数は

$$1 \cdot x + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$より

$$R_{2n+1} = (-1)^n \frac{f^{2n+1}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$= (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\theta x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ であるから

$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$である．

よって

$$\boldsymbol{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots}$$

また

$f(x) = \cos x$とおくと，$f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x$より，$f'(0) = -\sin 0 = 0$

$f''(x) = -\cos x$より，$f''(0) = -\cos 0 = -1$

$f'''(x) = \sin x$より，$f'''(0) = \sin 0 = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$より，$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$

$f^{(5)}(x) = -\sin x$より，$f^{(5)}(0) = -\sin 0 = 0$

よって

$f(x)$に関するマクローリン級数は

$$1 + \frac{1}{2!} \cdot (-1) \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$より

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{f^{2n}(\theta x)}{(2n)!}x^{2n} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$= (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\theta x \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ であるから

$\lim_{n\to\infty} R_{2n} = 0$である．

よって

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots}$$